الثلاثاء ٢٩ / ٥ / ٢٠١٨م عقدي ١٢١ المحاضرة الثالثة عشر - ١٣م -

محاضرة تمارين شاملة على المادة - والأخيرة -

* أربع فصول بـ ٤ أسئلة ١- التكاملات مع القيم العظمى ٢- المتسلسلات ٣- أنواع النقاط الشاذة ٤- نظرية الرواسب.

تمرين: احسب قيمة التكامل $\int_C f(z)\,dz$ اذا علمت أن $f(z) = \frac{z+2}{z}$

و C هي: أ: نصف الدائرة العلوي والذي تمتد من $z=2$ الى $z=-2$

ب: ~ ~ السفلي ~ ~ $z=2$ الى $z=-2$

٣: الدائرة $|z|=2$

الحل: نستخدم القاعدة

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt$$

أ - : معادلة الدائرة هي $z = 2e^{i\theta}$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$

⇐ وبالتالي فإن معادلة النصف العلوي هي $z = 2e^{i\theta}$; $0 \le \theta \le \pi$

$$\Rightarrow f(z(t)) = \frac{2e^{i\theta}+2}{2e^{i\theta}} = (e^{i\theta}+1)e^{-i\theta} = 1 + e^{-i\theta} \quad ; 0 \le \theta \le \pi$$

$$\Rightarrow z'(t) = 2i\,e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,d(z) = \int_0^{\pi} (1+e^{-i\theta})\, 2i e^{i\theta}\, d\theta = 2i\int_0^{\pi} e^{i\theta}+1 \; d\theta$$

$$\Rightarrow \quad = 2i\left[\frac{1}{i}e^{i\theta}+\theta\right]_0^{\pi} = 2i\left[-\frac{1}{i}+\pi-\frac{1}{i}\right] = -4+2\pi i$$

ب - : معادلة الدائرة هي $z = 2e^{i\theta}$; $0 \le \theta \le 2\pi$ ← للدائرة كاملة

وبالتالي فإن $z = 2e^{-i\theta}$ و $-2\pi \le \theta \le 0$ (وضعنا بدل كل θ بـ $-\theta$ لنعكس الاتجاه المعاكس)

⇐ معادلة النصف السفلي من الدائرة التي تمتد $z=2$ الى $z=-2$ هي

$z = 2e^{-i\theta}$ و $-\pi \le \theta \le 0$ ⇐ $z' = -i\,2e^{-i\theta}$

$$\Rightarrow f(z(\theta)) = \frac{2e^{-i\theta}+2}{2e^{-i\theta}} = (e^{-i\theta}+1)\,e^{i\theta} = 1+e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,d(z) = \int_{\pi}^{0} (1+e^{-i\theta})(-i2e^{-i\theta})\,d\theta = -i2\int_{-\pi}^{0}(e^{i\theta}+1)\,d\theta$$

$$= -2i\left[-\frac{1}{i}(e^{i\theta})+\theta\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= -2i\left[-\frac{1}{i}e^{0} + 0 - \left(-\frac{1}{i}e^{i\pi}\right) + (-\pi)\right]$$

$$= 2 + 2i\left[-\frac{1}{i}e^{i\pi} + \pi\right] = 2 + 2i\left[\frac{1}{i} - \pi\right] = \boxed{4 - 2i\pi}$$

٣":

إن معادلة الدائرة $z = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ «أداة بذكر الاتجاه نأخذ الاتجاه الموجب»

$$\Rightarrow z' = 2i\,e^{i\theta} \Rightarrow f(z(\theta)) = \frac{2e^{i\theta} + 2}{2e^{i\theta}} = (e^{i\theta} + 1)e^{-i\theta} = 1 + e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \int_c f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} (1 + e^{-i\theta})\,2i\,e^{i\theta}\,d\theta = 2i\int_0^{2\pi} e^{i\theta} + 1\,d\theta$$

$$= 2i\left[\frac{1}{i}e^{i\theta} + \theta\right]_0^{2\pi} = 2i\left[\frac{1}{i} + 2\pi - \left(\frac{1}{i} + 0\right)\right] = \boxed{4\pi i}$$

ملاحظة:
• الشرط منتفي
• والتكامل على منحنى

تمرين: احسب قيمة التكامل $\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$

حيث c هو الكفاف المعطى بالمعادلة
$$x^2 + y^2 = 2x + 2y$$

الحل:

الكفاف المعطى يكتب بالشكل
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

وهي معادلة دائرة مركزها $(1,1)$, نصف قطرها $R = \sqrt{2}$

إن النقاط الشاذة هي جذور معادلة المعادلة $(z-1)^2(z^2+1) = 0$

أي: $z - 1 = 0 \Leftarrow \boxed{z = 1}$ أو $z^2 + 1 = 0 \Leftarrow \boxed{z = -i}$, $\boxed{z = i}$

مركز الدائرة $z_0 = 1 + i$

$$|z_1 - z_0| = |1 - 1 - i| = |-i| = 1 < \sqrt{2}$$

$$|z_2 - z_0| = |-i - 1 - i| = |-1 - 2i| = \sqrt{5} > \sqrt{2}$$

$$|i - 1 - i| = |-1| = 1 < \sqrt{2}$$

ملاحظة: النقاط إما أن تقع
• داخل أو خارج
• أو على المحيط وعندئذٍ تقع لا يمكن حسابها حساب التكامل...»

⇐ وبالتالي نستنتج بأن $z_1 = 1$ تقع في داخلية الدائرة , $z_2 = -i$ تقع في خارجية الدائرة

, $z_3 = i$ تقع في داخلية الدائرة .

$f(z) . z-1$

ملاحظة: عندما يكون لدينا نقطة واحدة تقع داخل المنحني فلا داعي أن نحيطها بدائرة

⇐ نحيط $z_1 = 1$ بدائرة c_1 نصف قطرها صغير بقدر كاف

" " c_2 " $z_2 = i$ "

بحيث يكون $c_1 \cap c_2 = \phi$

⇐

$$\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = \int_{c_1} \frac{\frac{1}{(z^2+1)}}{(z-1)^2}dz + \int_{c_2}\frac{\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}}{(z-i)}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}\left[\frac{1}{z^2+1}\right]'_{z=1} + 2\pi i\left[\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right]_{z=i}$$

$$= 2\pi i\left[-\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right]_{z=1} + 2\pi i\left[\frac{1}{(-1+i)^2(2i)}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{-2}{4}\right] + 2\pi i\left[\frac{1}{4}\right] = -\pi i + \frac{\pi i}{2} = -\frac{\pi i}{2}$$

تمرين: عن القيمة العظمى.

لتكن لدينا الدالة $f(z) = 3z^2 - 1$

عين النقاط z من القرص الدائري $|z| \le 1$ التي تبلغ عندها الدالة القيمة العظمى

الحل:

الدالة المعطاة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهي دالة شاملة أي تحليلية عند جميع نقاط المستوي العقدي ومن باب أولى فهي تحليلية على نقاط القرص الدائري $|z| \le 1$

وبما أنها تحليلية عند النقاط $|z| \le 1$ فهي قابلة للاشتقاق ⇐ وبما أنها قابلة للاشتقاق

⇐ فهي مستمرة ، فهي مستمرة على المحيط و تحليلية في الداخل.

واستناداً إلى مبرهنة القيمة العظمى فإن الدالة تبلغ قيمتها العظمى على المحيط

$|f(z)|^2 = f(z).\overline{f(z)}$

لكن $|z| = 1 \Leftarrow z = e^{i\theta}$ ، $0 \le \theta \le 2\pi$ ⇐

$f(z) = 3e^{2i\theta} - 1 \to \overline{f(z)} = 3e^{-2i\theta} - 1$ (مرافق العدد الحقيقي نفسه (-1

$\Rightarrow |f(z)|^2 = (3e^{2i\theta} - 1)(3e^{-2i\theta} - 1) = 9 - 3e^{2i\theta} - 3e^{-2i\theta} + 1$

$$= 10 - 3\left(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}\right) = 10 - 6\left(\frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2}\right)$$

$$= 10 - 6\cos 2\theta$$

لكن نعلم بأن:

$$-1 \leq \cos(2\theta) \leq 1$$

$$\times\ -6 \qquad -6 \leq -6\cos(2\theta) \leq 6$$

$$+\ 10 \qquad 4 \leq 10 - 6\cos(2\theta) \leq 16$$

$$\Rightarrow 10 - 6\cos 2\theta = 16 \Rightarrow -6\cos(2\theta) = 6 \Rightarrow \cos(2\theta) = -1$$

$$\Rightarrow 2\theta = \pi + 2n\pi \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$n = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi] \rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ ← صبادلر

$n = 1 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \in [0, 2\pi] \Rightarrow z = e^{\frac{3\pi}{2}i} = -i$ ← صبادلر

أي أنّ الدالة تبلغ قيمتها العظمى عند : $z = -i$, $z = i$

(رسم: دائرة الوحدة عليها النقطتان $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$)

والآن تمارين النشر

* ملاحظة: الفرق بين نشر ماكلوران و لوران

وذلك من خلال تحديد النقاط حسب $|z - z_0| < r$ نشر تايلور، و $r_1 < |z - z_0| < r_2$ لوران

$|z| < r$ ماكلوران

$0 < |z| < r$ نشر لوران

• مع العلم أنّ نشر تايلور، ماكلوران لا يأتي "بالذي يأتي هو نشر لوران"

* سؤال النشر يعطي الدكتور نقاط معين، ولا نقول المستوى العقدي الممتد أم لا

بينما في تصنيف النقاط الشاذة يقول الدكتور بالمستوى العقدي الممتد، لتعيين نوع ص $z=\infty$

* اكسب دعاء أهلك ___ ♡ ♡ ♡

تمرين: لتكن لدينا الدالة: $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2(z-2)}$; $2<|z|$

أوجد منشور هذه الدالة.

الحل:

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-2} = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right)\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}}$$

$$= \left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right] \cdot \left[\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right]$$

$$= \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3}\right)\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} + \frac{16}{z^4} + \cdots + \frac{2^n}{z^n} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^4} + \cdots - \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} - \frac{8}{z^5} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^4} + \cdots$$

تمرين: أوجد منشور الدالة ضمن النطاق $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2(z-2)}$; $0<|z|<2$

الحل:

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-2} = \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right] \cdot \frac{1}{-2(1-\frac{z}{2})}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right] \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right] \cdot \left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} + \cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z\right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16}z$$

(b_1 = $-\frac{1}{4}$)

نستنتج من النشر السابق أن $z=0$ قطب لأن عدد الحدود ذات القوى السالبة محدود

ودرجة هذا القطب $= 2$ "لأنه أكبر أس بالقوى السالبة"

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{4} = b_1$$

والآن تمارين تصنيف النقاط الشاذة :

تمرين :

$$f(z) = \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} \quad ; \quad 0 < |z-i|$$

$$= \frac{1}{z-i}\left[1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-i)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-i)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z-i} + \frac{1}{1!}\frac{1}{(z-i)^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res} \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} = 1 \quad ; \quad \operatorname{Res} \frac{1}{z-i} e^{\frac{1}{z-i}} = -1$$

وبكتابة القانون تأخذ نفس العلامة

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -b_1$$

تمرين : عين وصنف النقاط الشاذة للدالة :

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1} \cot z$$

الحل :

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}$$

ان النقاط الشاذة هي جذور معادلة المقام ⇐

$(e^z - 1)(\sin z) = 0 \Rightarrow$ إما $\sin z = 0 \Rightarrow z = n\pi \; ; \; n = 0, \mp 1, \ldots$

أو $e^z - 1 = 0 \Rightarrow e^z = 1 \Rightarrow z = 2n\pi i \quad ; \; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

ومن أجل $n = 0$ ⇐ $z = 0$ صفر من الدرجة الثانية للمقام والصفر للبسط من الدرجة الثانية

وهذا يعني ان $z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح .

وباقي النقاط هي $z = n\pi \quad n = \mp 1, \mp 2, \ldots$ ، و أو ٥ علامات

و $z = 2n\pi i \; ; \; n = \mp 1, \mp 2, \ldots$

هي أقطاب بسيطة لأنه كلاً منها هي صفر من الدرجة الأولى للمقام ولا يعدم البسط

* ولكن بالدالة :

$$f(z) = \frac{(z-\pi)^2}{e^z - 1} \cot(z) = \frac{(z-\pi)^2}{e^z - 1} \cdot \frac{\cos z}{\sin z}$$

الحل : $z = 0$ لا تعدم البسط ، وصفر من الدرجة الثانية اذاً $z = 0$ قطب ثنائي

ومن أجل $n = 1$ ⇐ $z = \pi$ تعدم المقام وهي صفر له من الدرجة الأولى

كما أن $z=\pi$ هي صفر من الدرجة الثانية للبسط عند $z=\pi$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح

وباقي النقاط $z=n\pi \in n=-1,\mp 2,\dots$

$z=2n\pi i \in n=\mp 1,\mp 2\dots$

هي أقطاب بسيطة.

والآن تمارين عن مبرهنة الرواسب: ختاماً.

تمرين: اعتماداً على مبرهنة الرواسب احسب قيمة التكاملين الآتيين:

$$I_2=\int_{|z|=3}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}dz \quad , \quad I_1=\int_{|z|=3}\frac{z-2}{(z-1)^7(z-4)}dz$$

الحل:

إن الكفاف المعطى هو الدائرة التي مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $R=3$

النقاط الشاذة هي $z=1$, $z=-2$ والنقطتان تقعان في داخلية الكفاف

لذلك اعتماداً على مبرهنة الرواسب يكون:

$$I=2\pi i\,(b_1+b_2)$$

$$\Rightarrow b_1=\underset{z=1}{Res}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$b_2=\underset{z=-2}{Res}\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)} \Rightarrow b_2=\lim_{z\to -2}(z+2)\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$=\lim_{z\to -2}\frac{e^z}{(z-1)^2}=\frac{e^{-2}}{9}$$

وكون $z=1$ قطب ثاني عندئذٍ

$$b_1=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2(z+2)}$$

$$\Rightarrow b_1=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z+2)-e^z}{(z+2)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{(z+1)e^z}{(z+2)^2}=\frac{2e}{9}$$

$$\Rightarrow I_1=2\pi i\left(\frac{e^{-2}}{9}+\frac{2e}{9}\right)$$

بينما التكامل الثاني :

$$I_2 = \int_{|Z|=3} \frac{Z-2}{(Z-1)^{7}(Z-4)}\, dZ$$

الحل :

الكفاف المغلق هو دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $R=3$

النقاط الشاذة هي $Z=1$ ، $Z=4$

$Z=1$ تقع داخل وهي قطب من الرتبة السابعة

$Z=4$ تقع خارج الكفاف وهي قطب بسيط

انتباه لاستخدام قاعدة مجموع الرواسب

$$I_2 = 2\pi i\,(b_1)$$

نعلم أنه

$$\operatorname*{Res}_{Z=1} f(Z) + \operatorname*{Res}_{Z=4} f(Z) + \operatorname*{Res}_{Z=\infty} f(Z) = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{Z=1} f(Z) = -\operatorname*{Res}_{Z=4} f(Z) - \operatorname*{Res}_{Z=\infty} f(Z)$$

لأنه $Z=\infty$ صفر من الدرجة السابعة للدالة $f(Z)$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{Z=\infty} f(Z) = 0$$

وما أنه :

$$\operatorname*{Res}_{Z=4} f(Z) = \lim_{Z\to 4} \frac{(Z-4)(Z-2)}{(Z-1)^{7}(Z-4)}$$

$$\lim \frac{Z-2}{(Z-1)^{7}} = \frac{2}{3^{7}}$$

انتهت المحاضرة ١٣ والأخيرة

الامتحان قبل المادة بيوم 2018/6/23 تمنياتنا بالتوفيق